

Введение понятия «низкоэнтропийный сигнал»

КОРОВКИН Н.В., ГРИЦУТЕНКО С.С.

Вводится понятие низкоэнтропийного сигнала как временной зависимости, имеющей малый коэффициент вариабельности. Сравниваются высокоэнтропийный радиотехнический и низкоэнтропийный электротехнический сигналы. В результате моделирования устанавливается, что коэффициент вариабельности электротехнического сигнала в 100 и более раз ниже коэффициента вариабельности радиотехнического сигнала, поэтому данный показатель выбирается в качестве критерия различимости электротехнических и радиотехнических сигналов. Делается вывод о необходимости совершенствования математического аппарата цифровой обработки сигналов для анализа токов и напряжений в электроэнергетических системах. Также показано, что низкая энтропия электротехнического сигнала может быть использована для повышения точности контрольно-измерительного оборудования. Рассмотрен эффект вырождения шума квантования в набор гармоник при моделировании аналого-цифрового преобразования напряжений и токов в измерительных устройствах. Предложена методика, позволяющая компенсировать этот эффект за счет добавления белого гауссова шума перед операцией квантования. Представлена методика, позволяющая за счет использования низкой энтропии электротехнического сигнала увеличить точность контрольно-измерительного оборудования. Приведена схема аналого-цифрового преобразователя и дана оценка выигрыша в точности преобразования.

Ключевые слова: цифровая обработка сигналов, быстрое преобразование Фурье, цифро-аналоговый и аналого-цифровой преобразователь, гауссов шум, шум квантования, точность моделирования

Электроэнергетические системы (ЭЭС) — сложные и весьма дорогостоящие технические объекты. Значительная часть их стоимости приходится на контрольно-измерительное оборудование, позволяющее проводить идентификацию состояния ЭЭС. Источником информации для такого рода оборудования являются значения токов и напряжений, которые можно регистрировать и затем измерять их параметры в соответствии с утвержденными алгоритмами. Однако алгоритмы не учитывают свойств объекта измерения, которые могут оказывать значительное влияние на корректность получаемой информации и тем самым стать причиной ошибки идентификации.

Токи и напряжения в ЭЭС, безусловно, являются случайными процессами. Однако случайная составляющая в этих процессах мала. Амплитуды, фазы, частоты становятся все более стабильными, и данная тенденция, судя по всему, сохранится. При этом резко падает количество информации, которую мы получаем в процессе измерений, так как результаты измерений становятся предсказуемыми, а сами измерения — избыточными. Снижение избыточности алгоритмов приводит к уменьшению стоимости оборудования, которое их реализует. Поэтому задачу определения максимального

количества информации, получаемой от токов и напряжений в ЭЭС, следует считать актуальной.

Цель статьи — изучение токов и напряжений в ЭЭС как источников информации, оценка их информационной емкости и границ применимости к ним стандартных измерительных алгоритмов.

Математический аппарат. Рассмотрим токи и напряжения в ЭЭС с точки зрения теории информации Шеннона. Данный подход интересен с практической точки зрения и позволяет получить существенный выигрыш при решении задач идентификации, проектировании контрольно-измерительного оборудования. Теория информации работает с объектами, имеющими вероятностную природу. Это в полной мере относится к ЭЭС. Проиллюстрируем данный тезис следующим примером.

Электроэнергетическая система может находиться в трех состояниях: нормальном, предаварийном и аварийном. Пусть сообщения о состоянии ЭЭС передаются диспетчеру каждый час. При этом вероятность сообщения о нормальном режиме работы составляет 0,999, вероятность сообщения о предаварийном режиме — 0,0009 и вероятность сообщения об аварии — 0,0001. С точки зрения Шеннона, первое сообщение практически не несет информации, так как ожидаемо. С точки зрения диспетчера, это сообщение не требует никакой реак-

ции. Второе сообщение маловероятно и требует от диспетчера определенных действий – введения новых мощностей, отключения ряда потребителей и так далее. Следовательно, в этом сообщении информации больше, чем в первом. Вероятность последнего сообщения наименьшая, и от диспетчера оно потребует максимальной активности. Можно считать, что это сообщение содержит больше информации, чем сообщения номер один и номер два.

Рассмотренный пример показывает, что количество информации в сообщении тем больше, чем меньше его вероятность. Для количественной характеристики информации в сообщении (или в состоянии системы, как в рассмотренном примере) Шенноном была предложена формула [1]:

$$I = -\log_2 p, \quad (1)$$

где p – вероятность сообщения или состояния системы.

В соответствии с этой формулой первое состояние системы содержит 0,0014 бит информации, второе – 1,1, а третье – 13,3 бита. Количественной характеристикой средней информации, которую содержит одно состояние ЭЭС, является ее энтропия [1]:

$$H = \sum_{n=1}^N -p_n \log_2 p_n, \quad (2)$$

где H – количество всех возможных состояний ЭЭС; p_n – вероятность конкретного состояния. В рассмотренном примере ($N=3$) энтропия равна 0,012 бита, т.е. весьма мала.

Сделаем важное замечание. Обычно теорию информации используют для анализа систем связи, которые предназначены для передачи большего количества информации. Соответственно, энтропия передаваемых по этим системам сигналов велика. Для ЭЭС ситуация диаметрально противоположна. Усилия разработчиков ЭЭС и специалистов по их эксплуатации направлены на повышение неизменности сигнала, что соответствует снижению его энтропии. В приведенном примере наилучшим для ЭЭС является стремление к нулю вероятностей предаварийного и аварийного состояний системы. Поэтому

$$\lim_{p \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N -p_n \log_2 p \rightarrow 0, \quad (3)$$

следовательно, энтропия ЭЭС в идеале также стремится к нулю.

Отдельно следует остановиться на возможном разночтении термина «энтропия» применительно к

ЭЭС. В энергетике этот термин чаще всего используется в том же смысле, что и в термодинамике. В нашем случае термин «энтропия» используется для обозначения количества информации, приходящейся в среднем на одно состояние ЭЭС.

Рассмотрим далее задачу идентификации состояний ЭЭС. В приведенном примере диспетчер принимает решение о проведении того или иного объема технических мероприятий в зависимости от состояния ЭЭС. Однако состояние системы необходимо идентифицировать. Идентификация происходит на основе первичной информации, носителями которой чаще всего являются напряжения и токи, а также вычисляемые по ним значения (активных и реактивных мощностей, запасов статической и динамической устойчивости). Напряжения и токи представляют собой временные зависимости. Будем представлять их далее как набор первых 50 гармоник со случайными амплитудами и фазами:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=1}^{50} U_k(t) \sin(k\omega(t) + \varphi_{k,U}(t)); \\ i(t) &= \sum_{k=1}^{50} I_k(t) \sin(k\omega(t) + \varphi_{k,I}(t)), \end{aligned} \quad (4)$$

где $u(t)$, $i(t)$ – зависимости от времени напряжения и тока ЭЭС; $U_k(t)$, $I_k(t)$, $\varphi_{k,U}(t)$, $\varphi_{k,I}(t)$ – амплитуды и начальные фазы k -й гармоники напряжения и тока, представляющие собой медленно изменяющиеся во времени случайные процессы; $\omega(t)$ – частота первой гармоники, также представляющая собой медленно изменяющийся во времени случайный процесс. Соотношение (4) рассматривается далее как обобщенная математическая модель электротехнического сигнала. Дополняя ее теми или иными ограничениями на амплитуды и фазы гармоник, можно получить модели сигналов, хорошо описывающих различные характерные ситуации [2, 3].

Важно, что амплитуды токов и напряжений ЭЭС, хотя и являются случайными процессами, но случайная составляющая в них мала. Требования к стабильности параметров тока и напряжения в ЭЭС постоянно ужесточаются. Так, в соответствии с ГОСТ 29322-2014 (IEC 60038:2009) [4] отклонение амплитуды основной гармоники напряжения не может превышать 10%, а девиация частоты основной гармоники $\pm 0,2$ Гц. Следовательно, токи и напряжения в ЭЭС – процессы, близкие к детерминированным процессам, и количество информации, переносимое ими, невелико.

С этой точки зрения теории информации токи и напряжения ЭЭС являются сигналами. Их отли-

чие от сигналов, характерных для систем передачи информации (далее будем называть такие сигналы радиотехническими), состоит в том, что они переносят гораздо меньше информации. Для того чтобы подчеркнуть эту особенность токов и напряжений ЭЭС, далее будем их называть электротехническими сигналами.

Перейдем к количественным оценкам, позволяющим различать введенные классы сигналов, т.е. определим, во сколько раз электротехнический сигнал менее информативен, чем радиотехнический. Предварительно сделаем следующее замечание. Радиотехнические сигналы принято разделять на широкополосные и узкополосные. Под широкополосными сигналами подразумевают такие временные зависимости, в спектре которых верхняя частота в несколько раз превышает нижнюю. Сигналы, у которых нижняя и верхняя частоты близки, называют узкополосными. Рассматриваемый нами электротехнический сигнал не попадает ни под определение широкополосного, ни под определение узкополосного. Действительно, отношение верхней частоты в его спектре к нижней (50) достаточно велико. Однако каждая из гармоник из-за малой вариации $\omega(t)$ имеет очень узкую полосу, и суммарная полоса всего сигнала является узкой. Можно считать, что электротехнический сигнал является широкополосным и узкополосным одновременно. Уже данный факт можно использовать для выделения электротехнических сигналов в отдельный класс, однако существует маркер, который позволяет провести границу между электротехническим и радиотехническим сигналами более корректно.

Для дальнейшего важно, что спектр электротехнического сигнала сосредоточен вблизи частот гармоник, спектр радиотехнического сигнала равномерно распределен по занимаемой им полосе. Очевидно, в электротехническом сигнале содержится бесконечное количество информации, так как параметры этого сигнала могут иметь бесконечное число значений. При этом вероятность того, что какой-то параметр (например амплитуда гармоники) примет какое-то конкретное значение, стремится к нулю. Следовательно, количество информации, переносимое каждым значением, стремится к бесконечности:

$$\lim_{p \rightarrow 0} (-\log_2 p) \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Аналогичная ситуация имеет место и для радиотехнического сигнала, поэтому сравнивать полное количество информации, содержащейся в электротехническом и радиотехническом сигналах, бессмысленно.

Однако наличие информации в сигнале не означает, что ее можно получить полностью. При измерениях (передаче информации) всегда присутствует шум, что делает возможным извлечение из сигнала (передачу) только конечного количества информации. Поэтому задача состоит в том, чтобы сравнить количество информации, передаваемое электротехническим сигналом в присутствии шума, с аналогичной характеристикой радиотехнического сигнала.

Пусть u – случайная величина, являющаяся некоторой спектральной компонентой электротехнического сигнала. При измерении на нее накладывается соответствующая спектральная компонента белого гауссова шума n . В результате измеритель фиксирует величину $x = u + n$. Найдем среднее количество информации, передаваемой произвольной спектральной компонентой электротехнического сигнала u в регистрируемую компоненту x . Передаваемая из u в x информация («взаимная» информация) находится из соотношения [1]:

$$I(u, x) = H(u) + H(x) - H(u, x), \quad (6)$$

где $H(u)$, $H(x)$ – энтропия сигналов u и x ; $H(u, x)$ – их совместная энтропия.

Пусть u и n имеют нормальное распределение:

$$f(u) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2a^2}}; \quad f(n) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2}{2b^2}}, \quad (7)$$

где a и b – среднеквадратическое отклонение u и n . Откуда энтропия нормально распределенной случайной величины u согласно [5, 6]:

$$H(u) = \log_2 \sqrt{2\pi} e. \quad (8)$$

Определимся с энтропией x . Так как x – сумма двух нормально распределенных случайных величин, то ее распределение также нормальное. При этом среднеквадратическое отклонение x равно $\sqrt{a^2 + b^2}$. Следовательно,

$$H(x) = \log_2 \sqrt{(a^2 + b^2)2\pi} e. \quad (9)$$

Энтропия $H(u, x)$ может быть получена по формуле

$$H(u, x) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, x) \log_2 f(u, x) du dx, \quad (10)$$

где $f(u, x)$ – совместное распределение случайных величин u и x .

Для определения $f(u, x)$ предварительно вычислим совместное распределение $f(u, n)$. Так как u и n

– независимые случайные величины, то в соответствии с (7)

$$f(u, n) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2a^2}} \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2}{2b^2}}. \quad (11)$$

Выполнив подстановку $x = u + n$, $u = x - n$:

$$f(u, n) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2a^2}} \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2b^2}}, \quad (12)$$

после ряда преобразований получим:

$$H(u, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2a^2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2b^2}} \times \right. \\ \left. \times \left(\log_2 ab2\pi + \frac{(x-u)^2}{2b^2 \ln 2} + \frac{u^2}{2a^2 \ln 2} \right) dx \right] du. \quad (13)$$

После интегрирования (13) можно преобразовать:

$$H(u, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2a^2}} \left[\log_2 ab2\pi + \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{u^2}{2a^2 \ln 2} \right] du = \\ = \log_2 ab2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2a^2}} du + \frac{1}{2 \ln 2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2a^2}} du + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2a^2}} \frac{u^2}{2a^2 \ln 2} du. \quad (14)$$

После интегрирования преобразуем формулу (14):

$$H(u, x) = \log_2 ab2\pi + \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{2 \ln 2} = \\ = \log_2 ab2\pi + \frac{1}{\ln 2} = \log_2 ab2\pi e. \quad (15)$$

Теперь (6) с учетом (8) и (9) имеет вид:

$$I(u, x) = \log_2 \sqrt{a^2 2\pi e} + \log_2 \sqrt{(a^2 + b^2) 2\pi e} - \\ - \log_2 (ab2\pi e) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\left(\frac{a}{b} \right)^2 + 1 \right). \quad (16)$$

Мы получили количество информации, которая передается одной спектральной компонентой электротехнического сигнала (вещественной или мнимой) на произвольной частоте. Следовательно, полная информация, передаваемая на одной частоте

те ω обеими спектральными компонентами, будет в два раза больше:

$$I(\omega) = 2 \frac{1}{2} \log_2 \left(\left(\frac{a}{b} \right)^2 + 1 \right) = \log_2 (\eta^2(\omega) + 1), \quad (17)$$

где $\eta(\omega) = \frac{a}{b}$ – отношение сигнал/шум на частоте ω .

Соотношение сигнал/шум на определенной частоте $\eta(\omega)$ можно выразить через спектральные плотности сигнала и шума. Так как a – среднеквадратическое отклонение сигнала на частоте ω , то a^2 – дисперсия или мощность сигнала на частоте ω , т.е. спектральная плотность. Математически данное утверждение можно записать так:

$$a^2 = |U(\omega)|^2, \quad (18)$$

где $U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt$; $u(t)$ – сигнал.

Так как по условию шум $n(t)$ считается белым, то его спектральная плотность b^2 для любой частоты ω является константой и далее будет обозначаться как γ . Следовательно,

$$\eta^2(\omega) = \left(\frac{a}{b} \right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{|U(\omega)|^2}{\gamma}. \quad (19)$$

Проинтегрируем (17) по частоте и получим полное количество информации, которая может быть получена измерителем из электротехнического сигнала при заданной спектральной плотности шума измерительного тракта:

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \log_2 (\eta^2(\omega) + 1) d\omega = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \log_2 \left(\frac{|U(\omega)|^2}{\gamma} + 1 \right) d\omega. \quad (20)$$

Введенную в (20) величину R назовем коэффициентом вариабельности, который и является маркером, позволяющим различать электротехнические и радиотехнические сигналы. Далее покажем, что введение R конструктивно.

Основные результаты. Непосредственно вычислить R невозможно из-за наличия в (20) несобственного интеграла. Поэтому найдем для R подходящую оценку. Спектр рассматриваемого нами электротехнического сигнала ограничен 50-й гармоникой. Следовательно, несобственный интеграл можно заменить на собственный:

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \log_2 \left(\frac{|U(\omega)|^2}{\gamma} + 1 \right) d\omega = \int_{-\omega_h}^{\omega_h} \log_2 \left(\frac{|U(\omega)|^2}{\gamma} + 1 \right) d\omega, \quad (21)$$

где ω_h – верхняя частота в спектре электротехнического сигнала.

Заменяем интеграл на сумму. При этом возникает некоторая погрешность, что отражено в замене R на \tilde{R} :

$$\tilde{R} = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \log_2 \left(\frac{\left| U \left(k \frac{2\omega_h}{N} \right) \right|^2}{\gamma} + 1 \right) \frac{2\omega_h}{N}. \quad (22)$$

Учитывая, что $U \left(k \frac{2\omega_h}{N} \right)$ – дискретное преобразование Фурье (ДПФ) электротехнического сигнала (далее обозначаемое как U_k), которое симметрично относительно половины частоты дискретизации, получаем:

$$\tilde{R} = \frac{\Delta F}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \log_2 \left(\frac{|U_k|^2}{\gamma} + 1 \right), \quad (23)$$

где N – размер окна, на котором выполняется ДПФ электротехнического сигнала.

Очевидно, вычисление по (23) дает только приближенное значение R из (20), однако согласно проведенному моделированию формулы в среде Matlab уже при $N > 1000$ ошибка становится незначительной (менее 1%) и ею можно пренебречь.

Определим далее коэффициент R для радиотехнического и электротехнического сигналов. В качестве радиотехнического сигнала, с которым будем выполнять сравнение, возьмем сигнал, спектр которого равномерно распределен по занимаемой им полосе. Электротехнический сигнал опишем в соответствии с (4).

Примем для параметров модели сигнала (4) следующие ограничения: амплитуды четных гармоник равны нулю, а среднеквадратичные значения амплитуд нечетных гармоник с номерами 3 и выше

равны 1% амплитуды первой гармоники. Девiation частоты основной гармоники выберем из данных, предоставляемых Системным оператором ЕЭС [7]. В дальнейшем рассмотрении ее значение равно 0,01, 0,02, 0,03, 0,04 Гц. Отклонение амплитуды основной гармоники выбрано в соответствии с ГОСТ 32145-2013 [8] – 1; 5 и 10%.

Пусть частота дискретизации обоих сигналов равна 10 кГц, а интервал времени, на котором проводится измерение, составляет 1 ч. Соотношение сигнал/шум, определяемое в современных измерительных устройствах шумами аналого-цифрового преобразователя (АЦП), примем равным 10000, 1000 и 100. Результаты моделирования приведены в таблице.

Как видно из таблицы, для всех Δu и Δf коэффициент R варибельности электротехнического сигнала в современных измерительных устройствах в 40–100 раз меньше коэффициента варибельности аналогичного по занимаемой полосе радиотехнического сигнала. Это подтверждает возможность использования коэффициента R в качестве маркера для их различия.

Значительная разница в варибельности приводит к серьезным последствиям как практического, так и теоретического характера. В отношении сигналов обоих типов при анализе используется одинаковый математический аппарат [9–16], разработанный именно для радиотехнических сигналов. Этот математический аппарат является, строго говоря, некорректным для электротехнических сигналов.

Приведем примеры, иллюстрирующие данный тезис.

Современные алгоритмы цифровой обработки сигналов строятся на базе теоремы Котельникова. Предполагается, что сигнал удовлетворяет требованиям этой теоремы, что, безусловно, выполняется для радиотехнических сигналов. Проверим, выполняются ли условия теоремы Котельникова для часто используемых математических моделей электро-

Отношение коэффициента R варибельности радиотехнического сигнала к коэффициенту варибельности электротехнического сигнала

$\Delta u, \%$	η											
	10000				1000				100			
	$\Delta f, \text{ Гц}$											
	0,01	0,02	0,03	0,04	0,01	0,02	0,03	0,04	0,01	0,02	0,03	0,04
	$H, \text{ биты}$											
1	88,3	56,3	42,6	34,7	150,0	87,2	62,5	49,2	192	107	76,9	60,6
5	87,6	55,9	42,3	34,5	149,2	86,8	62,3	49,0	191	107	76,7	60,5
10	87,1	55,6	42,1	34,3	148,5	86,4	62,1	48,8	192	107	76,6	60,4

технического сигнала. Согласно [17] таких требований три: финитность спектра, соответствие условиям Дирихле и интегрируемость от $-\infty$ до $+\infty$. Первые два требования обычно выполняются, но третье, если не учитывать характерную для электротехнического сигнала энтропию, чаще всего нет.

Сначала рассмотрим модель, предложенную ГОСТ 30804.4.7-2013 (IEC 61000-4-7:2009), а именно, набор из 50 гармоник:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{50} a_k \sin(v_k t) + \sum_{k=1}^{50} b_k \cos(v_k t), \quad (24)$$

где v_k – частота k -й гармоники; a_k и b_k – амплитуды гармоник.

Вторая модель описывает такое явление, как биения [18]. В этом случае напряжение задается двумя синусоидальными сигналами с близкими частотами v_1 и v_2 :

$$u(t) = \sum_{k=1}^2 a_k \sin(v_k t) + \sum_{k=1}^2 b_k \cos(v_k t). \quad (25)$$

Третья модель описывает девиацию частоты синусоидального напряжения по закону

$$1 + m \sin(\omega_d t), \quad (26)$$

где ω_d – частота девиации; m – амплитуда девиации. Соответственно, напряжение задается формулой:

$$u(t) = \cos(\omega_1 + m \sin(\omega_d t))t = \frac{1}{2} e^{j(\omega_1 + m \sin(\omega_d t))t} + \frac{1}{2} e^{-j(\omega_1 + m \sin(\omega_d t))t}, \quad (27)$$

где ω – частота основной гармоники.

В соответствии с [19]

$$e^{jm \sin(\omega_d t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) e^{jk \omega_d t}, \quad (28)$$

где J_k – функция Бесселя.

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) e^{j(k \omega_d + \omega)t} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) e^{-j(k \omega_d + \omega)t} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) \cos(k \omega_d + \omega)t; \\ u(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \sin(v_k t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \cos(v_k t), \quad (29) \end{aligned}$$

где $v_k = k \omega_d + \omega$; $a_k = 0$; $b_k = J_k(m)$.

Таким образом, проверка интегрируемости сигналов, описываемых всеми тремя моделями, сводится к проверке интегрируемости функции вида $\sum_k a_k \sin(v_k t) + \sum_k b_k \cos(v_k t)$. Выполним эту проверку:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_k a_k \sin(v_k t) + \sum_k b_k \cos(v_k t) \right) dt = \\ &= \sum_k a_k \int_{-\infty}^{\infty} \sin(v_k t) dt + \sum_k b_k \int_{-\infty}^{\infty} \cos(v_k t) dt. \quad (30) \end{aligned}$$

Делаем подстановку $\tau = v_k t$, $dt = \frac{d\tau}{v_k}$:

$$\sum_k \frac{a_k}{v_k} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\tau) d\tau + \sum_k \frac{b_k}{v_k} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau) d\tau. \quad (31)$$

Однако эта функция не является интегрируемой, так как

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t) dt &= \sin(\infty) - \sin(-\infty); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t) dt &= -\cos(\infty) + \cos(-\infty), \quad (32) \end{aligned}$$

а значения $\sin(\infty)$, $\sin(-\infty)$, $\cos(\infty)$ и $\cos(-\infty)$ не определены. Таким образом, чисто формально теорему Котельникова, а также большинство измерительных алгоритмов, основанных на ней, к такому сигналу применять нельзя.

Приведем еще один пример, показывающий, что стандартные допущения, применимые к радиотехническому сигналу, плохо работают в отношении электротехнического сигнала. Рассмотрим стандартную операцию квантования, которой подвергается любой сигнал при аналого-цифровом преобразовании. Такая операция является округлением до ближайшего уровня квантования сигнала, представленного отсчетами, имеющими бесконечную точность. Ее можно записать в виде уравнения

$$\tilde{x}(n) = x(n) + \delta(n), \quad (33)$$

где $x(n)$, $\tilde{x}(n)$ – дискретизированные сигналы до и после квантования; $\delta(n)$ – ошибка квантования или, иначе, шум квантования.

Существует известное [20–22] и хорошо работающее в отношении радиотехнического сигнала допущение, что шум квантования имеет равномерное распределение амплитуды и одновременно равномерно распределенный спектр (рис. 1), т.е. шум является белым. Однако это противоречит теореме

Ляпунова, из которой следует, что если сигнал состоит из большого числа независимых синусоид, то его распределение должно быть нормальным. Данное противоречие практически никак себя не проявляет в случае квантования высокоэнтропийных радиотехнических сигналов. Однако, если квантовать низкоэнтропийные электротехнические сигналы, то допущение о равномерности спектрального распределения ошибки квантования приводит к серьезным погрешностям при проектировании измерительного оборудования. Рассмотрим следующий пример.

На рис. 2 показан спектр ошибки квантования при синусоидальном сигнале для числа уровней квантования 201 при различных размерах окна ДПФ. Частота синусоиды такова, что период последовательности ее дискретных отсчетов равен интервалу, на котором вычисляется ДПФ. При размере окна 10^4 отсчетов в результате квантования получим спектр, изображенный на рис. 2,а. Получаемый результат соответствует принятому допущению о белом спектре шума квантования. Видим, собственно, квантуемую синусоиду и действительно белый шум.

Увеличим число отсчетов до 10^5 (рис. 2,б). Шум перестает быть белым, спектр ошибки квантования группируется в местах, где должны находиться гармоники электротехнического сигнала. При этом получаем не только гармоники, расположенные выше частоты синусоиды, но и гармоники, расположенные ниже этой частоты. При увеличении числа отсчетов до 10^6 (рис. 2,в) тенденция становится еще более очевидной. Гармоники представлены достаточно явно, что противоречит допущению о белом спектре шума квантования.

Данный факт необходимо учитывать при моделировании контрольно-измерительного оборудования, так как большинство измерительных алгоритмов построены на возможности усреднения результатов измерения, что в случае белого шума позволяет значительно повысить точность. Однако в представленном примере усреднение не обеспечит ожидаемого эффекта, если же гармоники гармонического сигнала наложатся на гармоники шума квантования, то точность измерения окажется значительно ниже расчетной.

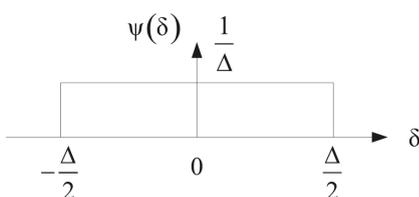


Рис. 1. Плотность вероятности шума квантования

Рассмотренные простейшие примеры показывают, что использование в отношении электротехнических сигналов подходов, выработанных для радиотехнических сигналов, может привести к достаточно серьезным проблемам. Покажем далее, что понимание и использование свойства низкой энтропийности электротехнического сигнала позволяют исключить эти проблемы.

Так как вырождение шума квантования в набор гармоник при квантовании электротехнического сигнала вызвано малым значением его коэффициента вариабельности, то решать эту проблему необходимо увеличением вариабельности квантуемого сигнала. Для этого в модель контрольно-измерительного устройства перед квантованием достаточно добавить слабый гауссов шум со среднеквадратичным отклонением (СКО), примерно равным шагу квантования. Результаты моделирования данного подхода представлены на рис. 3. На рис. 3,а показан спектр квантованной синусоиды без добавления шума. Как и было описано выше, в ее спектре имеются ярко выраженные пики, которые можно трактовать как гармоники. Если перед квантованием электротехнического сигнала к нему добавляется шум с СКО, соответствующим одному шагу квантователя или, что то же самое, младшему разряду АЦП, гармоники полностью компенсируются, а спектр становится белым (рис. 3,б). То, что гармоники именно компенсируются, а не скрываются

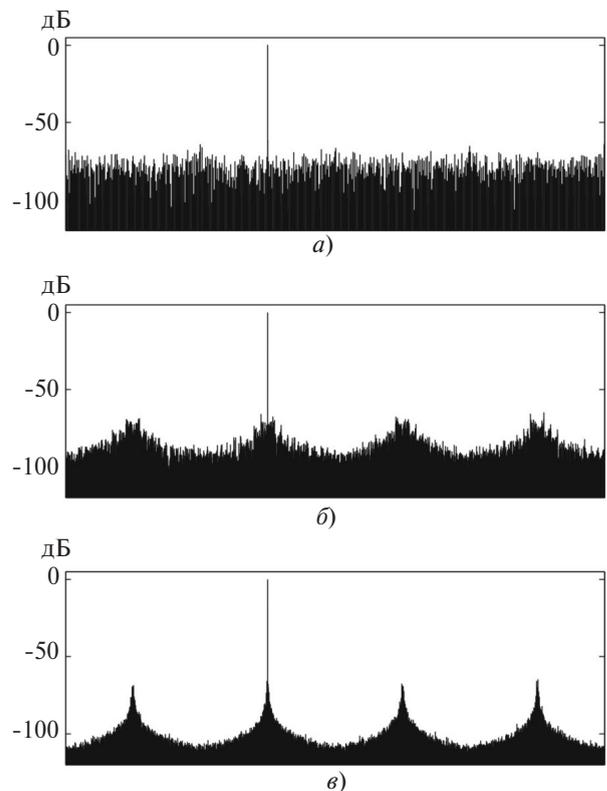


Рис. 2. Спектр квантованной синусоиды при размере окна ДПФ: а — 10^4 отсчетов; б — 10^5 отсчетов; в — 10^6 отсчетов

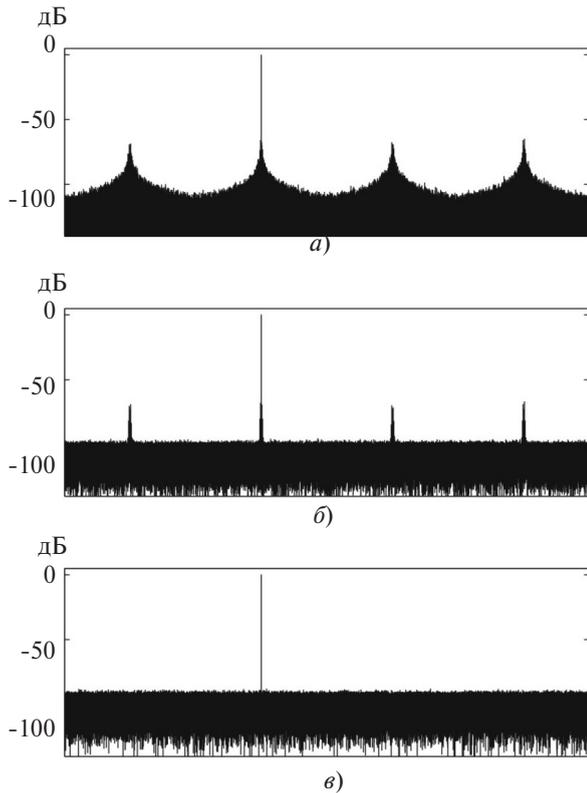


Рис. 3. Спектр квантованной синусоиды: *а* — без добавления шума до операции квантования; *б* — с добавлением до операции квантования гауссова шума с малым СКО; *в* — с добавлением до операции квантования гауссова шума с большим СКО

ются под внесенным в модель шумом, хорошо видно на рис. 3,б, где к сигналу перед квантованием был добавлен шум с СКО, равным половине шага квантователя. Если на рис. 3,а гармоники имеют мощный пьедестал и большую амплитуду, то на рис. 3,б их амплитуда уменьшилась, а пьедестал практически исчез.

Приходим к парадоксальному выводу: для повышения в модели измерителя точности измерения необходимо ухудшение сигнала добавлением к нему аддитивного шума. Такой подход имеет смысл только при работе с низкоэнтропийными сигналами. Отсюда следует вывод, что стандартный математический аппарат цифровой обработки сигналов должен быть доработан для случая электротехнического сигнала. Более подробно вопрос квантования электротехнических сигналов рассмотрен в [17, 23–25].

Низкий коэффициент вариабельности у электротехнического сигнала не является отрицательным фактором. Покажем, что его можно использовать для улучшения технических характеристик контрольно-измерительного оборудования. Рассмотрим задачу повышения точности регистрации электротехнического сигнала за счет использования его свойства низкой энтропии. Сначала рассмотрим стандартную схему регистрации, пред-

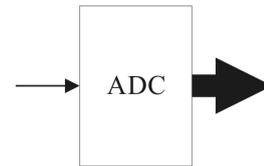


Рис. 4. Стандартная схема регистрации электротехнического сигнала

ставленную на рис. 4. Как видно, электротехнический сигнал подается на вход АЦП, где и дискретизируется и квантуется. Точность регистрации зависит от числа разрядов используемого АЦП.

Однако необходимо учитывать тот факт, что электротехнический сигнал может быть хорошо предсказуем на интервалах времени порядка 10 мс. Получается, что измеритель выдает информацию, которая нам и так известна, так как может быть предсказана. С точки зрения математики, измеряя детерминированную составляющую сигнала (которая в основном и содержится в электротехническом сигнале), мы не получаем никакой информации, вся она содержится в случайной составляющей, следовательно, только ее и необходимо измерять. Таким образом, если из электротехнического сигнала удалить детерминированную составляющую, то все ресурсы АЦП будут тратиться только на случайную составляющую. Соответственно, точность измерения увеличится.

Схема, реализующая эту идею, представлена на рис. 5. Она состоит из двух АЦП. Первый измеряет исходный сигнал, затем с помощью цифрового фильтра из электротехнического сигнала выделяется первая гармоника. В данном случае она представляет собой детерминированную составляющую, которая за счет своей крайне низкой энтропии может быть выделена с высокой точностью. Далее первая гармоника снова преобразуется в аналоговый сигнал с помощью цифро-аналогового преобразователя и вычитается из исходного сигнала. В результате получаем случайную составляющую, которая подается на второй АЦП, где дискретизируется и квантуется. Результат суммируется с ранее

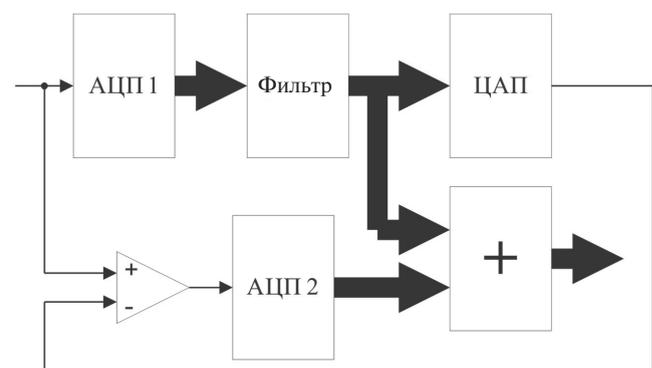


Рис. 5. Усовершенствованная схема регистрации электротехнического сигнала

выделенной первой гармоникой, и мы получаем исходный сигнал, но измеренный с точностью в 4 и более раза выше, чем с помощью стандартной схемы. Более подробно методика оцифровки электротехнических сигналов рассматривается в [26–30].

Выводы. 1. Введено понятие низкоэнтропийного сигнала в отношении напряжений и токов в ЭЭС. Получена формула коэффициента вариабельности, который введен в качестве маркера, позволяющего отличать электротехнический сигнал от прочих сигналов, характерных для радиотехники. Показано, что коэффициент вариабельности у электротехнического сигнала в 100 и более раз ниже, чем у радиотехнического.

2. Для квантования электротехнических сигналов показано, что у низкоэнтропийных сигналов необходимо совершенствовать математический аппарат, так как существующие эмпирические допущения, позволяющие упрощать анализ радиотехнических сигналов, в случае электротехнического сигнала становятся критическими и приводят к коллизиям.

3. Свойство низкоэнтропийности можно использовать для улучшения технических характеристик контрольно-измерительного оборудования, в том числе и для повышения его точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грицутенко С.С. Изоморфизм плотных и дискретных пространств Гильберта в цифровой обработке сигнала. — Омский научный вестник, 2009, № 3(83), с. 19–22.
2. ГОСТ 29322-2014 (IEC 60038:2009). Напряжения стандартные. Введ. 2014–09–14. М.: Стандартинформ, 2014, 28 с.
3. Su Taixin, et al. Power harmonic and interharmonic detection method in renewable power based on Nuttall double-window all-phase FFT algorithm. — IET Renewable Power Generation, 12.8 (2018), 953–961.
4. Raichura, Maulik B., et al. Identification of Inrush and Fault Conditions in Power Transformer using Harmonic Distortion Computation. 1st Intern. Conf. on Energy, Systems and Information Processing (ICESIP), IEEE, 2019.
5. Вернер М. Основы кодирования. М.: Техносфера, 2004, 288 с.
6. Колмогоров А.Н., Прохоров Ю.В. Теория информации и теория алгоритмов. М.: Наука, 1987, 304 с.
7. Системный оператор Единой энергетической системы: Частота [Электрон. ресурс] http://so-ups.ru/?id=ees_freq (дата обращения 16.04.2018).
8. ГОСТ 32145-2013 (ГОСТ Р 53333-2008). Электрическая энергия. Совместимость технических средств электромагнитная. Контроль качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения. Введ. 2014–01–01. М.: Стандартинформ, 2014, 28 с.
9. Бутырин П.А. Расщепление и аналитическое решение жестких уравнений электрических цепей. — Электричество, 2018, № 9, с. 49–51.
10. Бутырин П.А., Зайцева Н.Н. Аналитическое определение чувствительности показателей качества электроэнергии к изменению параметров линейных электрических цепей. — Изв. РАН. Энергетика, 2014, № 2, с. 167–169.
11. Бутырин П.А. и др. Физическое моделирование поличастотного фильтрокомпенсирующего устройства на основе каткона. — Изв. РАН Энергетика, 2017, № 5, с. 67–74.
12. Бутырин П.А. и др. Математическое и физическое моделирование фильтрокомпенсирующего устройства на основе каткона. — Электричество, 2014, № 11, с. 58–62.
13. Бутырин П.А., Шакирзянов Ф.Н. Моделирование знаний по теоретической электротехнике. — Электричество, 2013, № 9, с. 61–62.
14. Бутырин П.А. и др. Идентификация математической модели фильтрокомпенсирующего устройства на основе каткона с учетом нелинейной характеристики магнитопровода. — Электричество, 2017, № 10, с. 55–60.
15. Бутырин П.А. и др. Моделирование переходных процессов в катушке-конденсаторе при импульсном воздействии. — Изв. РАН Энергетика, 2019, № 1, с. 109–122.
16. Бутырин П.А. и др. Алгоритм определения параметров каткона - элемента оптимизации режимов электрических сетей. — Изв. РАН, Энергетика, 2015, № 2, с. 69–75.
17. Грицутенко С.С. Проблемы изоморфизма плотного и дискретного пространств Гильберта. М.: Учебно-метод. центр по образованию на железнодорожном транспорте, 2012, 184 с.
18. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов. Том 1, 4-е изд. СПб.: Питер, 2003, 463 с.
19. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Дрофа, 2006, 719.
20. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д. Цифровая обработка сигналов: Учебное пос. для вузов. М.: Радио и связь, 1990, 256 с.
21. Robert M. Gray, David L. Neuhoff, Quantization, IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-44, Oct. 1998, No. 6, pp. 2325–2383.
22. Hodgson, Jay (2010). Understanding Records, p.56. ISBN 978-1-4411-5607-5. Adapted from Franz, David (2004). Recording and Producing in the Home Studio, p. 38–9. Berkley Press.
23. Грицутенко С.С. Повышение достоверности измерения показателей качества электрической энергии в системе тягового электроснабжения: дисс.... канд. техн. наук: 05.22.07. Омск, 2007, 154 с.
24. Грицутенко С.С., Коровкин Н.В. Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. — Материалы Международ. научного семинара им. Ю.Н. Руденко. Чолпон-Ата., 2017, с. 586–595.
25. Грицутенко С.С. Квантование синусоидальных сигналов. — Вестник ИжГТУ им. М.Т. Калашникова, 2010, № 4(48), с. 173–176.
26. Бибердорф Э. А., Грицутенко С. С., Фирсанов К.А. Метод расширения динамического диапазона при аналого-цифровом преобразовании. — Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии, 2010, № 2(90), 200–202.
27. Грицутенко С.С. К вопросу об измерении параметров дискретизированного сигнала. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. Общетеchnическая, 2010, вып. 3, с. 103–107.
28. Quantization for Maximal Preservation of Information. S. Gritsutenko, K. Firsanov, R. Dinis. IASTED SPPRA'2013, Innsbruck, Austria, Feb., 2013.
29. Грицутенко С.С. Теорема об оптимальном квантовании. — Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова. Сер. Цифровая обработка сигналов и ее применение, 2011, вып. XIII-1, с. 22–24.
30. Бибердорф Э.А., Грицутенко С.С. Оценка разрядности ЦАП для OFDMA-модуляции: Сборник трудов. М.: ИППМ РАН, 2010, с. 472–477.

А в т о р ы: **Коровкин Николай Владимирович** – доктор техн. наук, профессор Высшей школы высоковольтной энергетики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

Грицутенко Станислав Семенович – кандидат техн. наук, доцент кафедры «Защита информации» Омского государственного университета путей сообщения.

Electrichestvo, 2020, No. 10, pp. 33–43

DOI:10.24160/0013-5380-2020-10-33-43

Introduction of the Low-Entropy Signal Concept

KOROVKIN Nikolay V. (*Peter the Great S.Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia*) – Professor of Higher School of High Voltage Energy, Dr. Sci. (Eng.)

GRITSUTENKO St. S. (*Omsk State Transport University, Omsk, Russia*) – Associate Professor of Information Security Dept., Cand. Sci. (Eng.)

The article introduces the concept of a low-entropy signal as a time dependence that has a small variability coefficient. A high-entropy radio signal and a low-entropy electrical signal are compared. It is determined as a result of modeling that the variability coefficient of the electrical signal is 100 or more times smaller than the radio signal variability coefficient; therefore, this indicator is selected as a criterion for discrimination of electrical and radio signals. A conclusion is drawn about the need to improve the mathematical techniques for digital processing of signals for analyzing the currents and voltages in electric power systems. It is also shown that low entropy of an electrical signal can be used for improving the accuracy of instrumentation and control equipment. The effect of quantization noise degeneration into a set of harmonic components in modeling the analog-to-digital conversion of currents and voltages in measurement devices is considered. A procedure for compensating this effect by adding white Gaussian noise prior to carry out the quantization operation is proposed. A procedure that allows better accuracy of instrumentation and control equipment to be obtained by using the low entropy of an electric signal is presented. The analog-to-digital converter circuit diagram is given, and the gain in the conversion accuracy is estimated.

К е у в о р д с: digital processing of signals, fast Fourier transform, digital-to-analog and analog-to-digital converters, Gaussian noise, quantization noise, modeling accuracy

REFERENCES

1. **Gritsutenko S.S.** *Omskiy nauchnyy vestnik – in Russ. (Omsk Scientific Bulletin)*, 2009, № 3 (83), pp. 19–22.
2. **GOST 29322-2014** (IEC 60038:2009). *Napryazheniya standartnyye. Vved. 2014–09–14.* (The voltages are standard. Enter. 2014-09-14). M.: Standartinform, 2014, 28 p.
3. **Su, Taixin, et al.** Power harmonic and interharmonic detection method in renewable power based on Nuttall double-window all-phase FFT algorithm. – *IET Renewable Power Generation*, 12.8 (2018), 953–961.
4. **Raichura, Maulik B., et al.** Identification of Inrush and Fault Conditions in Power Transformer using Harmonic Distortion Computation. 1st Intern. Conf. on Energy, Systems and Information Processing (ICESIP), IEEE, 2019.
5. **Verner M.** *Osnovy kodirovaniya (Coding Basics)*. M.: Tekhnosfera, 2004, 288 p.
6. **Kolmogorov A.N., Prokhorov Yu.V.** *Teoriya informatsii i teoriya algoritmov (Information theory and the theory of algorithms)*. M.: Nauka, 1987, 304 p.
7. **Sistemnyy operator Yedinoy energeticheskoy sistemy: Chastota** (System operator of the Unified Energy System: Frequency [Electron. resource] http://so-ups.ru/?id=ees_freq (Date of appeal 04/16/2018).
8. **GOST 32145-2013** (GOST R 53333-2008). *Elektricheskaya energiya. Sovmestimost' tekhnicheskikh sredstv elektromagnitnaya Kontrol' kachestva elektricheskoy energii v sistemakh elektrosnabzheniya obshchego naznacheniya. Vved. 2014–01–01* (Electric Energy. Electromagnetic compatibility of technical means. Electricity quality control in general-purpose power supply systems. Enter. 2014-01-01). M.: Standartinform, 2014, 28 p.
9. **Butyrin P.A.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2018, No. 9, pp. 49–51.
10. **Butyrin P.A., Zaytseva N.N.** *Izv. RAN. Energetika – in Russ. (News of Russian Academy of Sciences. Power Engineering)*, 2014, No. 2, pp. 167–169.
11. **Butyrin P.A. i dr.** *Izv. RAN Energetika – in Russ. (News of Russian Academy of Sciences)*, 2017, No. 5, pp. 67–74.
12. **Butyrin P.A. i dr.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2014, No. 11, pp. 58–62.
13. **Butyrin P.A. Shakirzyanov F.N.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2013, No. 9, pp. 61–62.
14. **Butyrin P.A. i dr.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2017, No. 10, pp. 55–60.
15. **Butyrin P.A. i dr.** *Izv. RAN Energetika – in Russ. (News of Russian Academy of Sciences. Power Engineering)*, 2019, No. 1, pp. 109–122.
16. **Butyrin P.A. i dr.** *Izv. RAN, Energetika (News of Russian Academy of Sciences. Power Engineering)*, 2015, No. 2, pp. 69–75.
17. **Gritsutenko S.S.** *Problemy izomorfizma plotnogo i diskretnogo prostranstv Gil'berta (Isomorphism problems for dense and discrete*

Hilbert spaces. Educational method. center for education in railway transport). Uchebno-metod. tsentr po obrazovaniyu na zheleznodorozhnom transporte, 2012, 184 p.

18. **Demirchyan K.S., Neyman L.R., Korovkin N.V., Chechurin V.L.** *Teoreticheskiye osnovy elektrotehniki: Uchebnik dlya vuzov. Tom 1, 4-ye izd.* (Theoretical foundations of electrical engineering: In 3 volumes. Textbook for universities. Vol. 1, 4th ed.). SPb.: Piter, 2003, 463 p.

19. **Gonorovskiy I.S.** *Radiotekhnicheskiye tsepi i signaly* (Radio engineering circuits and signals). M.: Drofa, 2006, 719.

20. **Gol'denberg L.M., Matyushkin B.D.** *Tsifrovaya obrabotka signalov : Uchebnoye pos. dlya vuzov* (Digital signal processing: Textbook. for universities). M.: Radio i svyaz', 1990, 256 p.

21. **Robert M. Gray, David L. Neuhoff,** Quantization IEEE Transactions on Information Theory, Oct. 1998, vol. IT-44, No. 6, pp. 2325–2383.

22. **Hodgson, Jay** (2010). Understanding Records, p.56. ISBN 978-1-4411-5607-5. Adapted from Franz, David (2004). Recording and Producing in the Home Studio, pp. 38–9. Berkley Press.

23. **Gritsutenko S.S.** *Povysheniye dostovernosti izmereniya pokazate-ley kachestva elektricheskoy energii v sisteme tyagovogo elektrosnabzheniya: diss.... kand. tekhn. nauk: 05.22.07* (Increasing the reliability of measuring the quality indicators of electrical energy in the traction power supply system: diss.... Cand. tech. Sciences: 05.22.07.). Omsk, 2007, 154 p.

24. **Gritsutenko S.S., Korovkin N.V.** *Metodicheskiye voprosy issledovaniya nadezhnosti bol'shikh sistem energetiki.— Materialy*

Mezhdunaro. nauchnogo seminar im. Yu.N. Rudenko (Methodical issues of research of reliability of large power systems. scientific seminar them. Yu.N. Rudenko). Cholpon-Ata., 2017, pp. 586–595.

25. **Gritsutenko S.S.** *Vestnik IzhGTU im. M.T. Kalashnikova – in Russ (Bulletin of the IzhGTU named M.T. Kalashnikov)*, 2010, No. 4(48), pp. 173–176.

26. **Biberdorf E.A., Gritsutenko S.S., Firsanov K.A.** *Omskiy nauchnyy vestnik. Ser. Pribory, mashiny i tekhnologii – in Russ. (Omsk Scientific Bulletin. Series Devices, machines and technologies)*, 2010, No. 2(90), 200–202.

27. **Gritsutenko S.S.** *Voprosy radioelektroniki. Seriya obshchetekhnicheskaya (Questions of Radioelectronics. Ser. General Technical)*, 2010, iss. 3, pp. 103–107.

28. **Gritsutenko S., Firsanov K., Dinis R.** Quantization for Maximal Preservation of Information. — IASTED SPPRA'2013, Innsbruck, Austria, Feb., 2013.

29. **Gritsutenko S.S.** *Trudy Rossiyskogo nauchno-tekhnicheskogo obshchestva radiotekhniki, elektroniki i sye primeneniye – in Russ. (Proc. of Russian Scientific-Technical Society of Radiotechnics, Electronics and Communication named A.S. Popov. Ser. Figure Treat and Its Use)*, 2011, iss. XIII-1, pp. 22–24.

30. **Biberdorf E.A., Gritsutenko S.S.** *Otsenka razryadnosti TSAP dlya OFDMA-modulyatsii. Sbornik trudov* (Estimation of the digit capacity of the DAC for OFDMA modulation. Collection of works). M.: IPPM RAN, M.: 2010, pp. 472–477.

[05.05.2020]